1982 -177-

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants qui seront notés chacun sur 10.

PREMIER PROBLEME

Première question -

- n étant un entier naturel au moins égal à 2, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées à n colonnes, à éléments dans Q , telles que la somme des éléments d'une ligne est 1 , quel que soit l'indice de la ligne.

a) Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice appartenant à $\mathcal{A}_n$
Préciser un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est stable pour la multiplication des matrices.

c) On donne k + 1 rationnels $\{a_o , a_1 , \dots a_k\}$ et k + 1 matrices appartenant à $\mathcal{A}_n$: $\{U_o , U_1 , \dots U_k\}$
donner la condition nécessaire et suffisante (1) que doit vérifier le k + 1 uplet ($a_o , a_1 , \dots a_k$) pour que la matrice $a_oU_o + a_1U_1 + \dots a_kU_k$ appartienne à $\mathcal{A}_n$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante (2) que doit vérifier le polynôme $P = a_o + a_1X + \dots + a_kX^k$ pour que la matrice $P(U) = a_oU^o + a_1U + \dots + a_kU^k$ appartienne à $\mathcal{A}_n$ quel que soit U appartenant à $\mathcal{A}_n$.

./.

Deuxième question -

Les notations étant celles de la première question, on note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n$ telles que la somme des éléments d'une colonne est 1 quel que soit l'indice de la colonne.

$\mathcal{B}_n$ est-il stable pour la multiplication ? La condition (1) obtenue dans la première question est-elle également nécessaire et suffisante pour que la matrice $a_o U_o + a_1 U_1 + \dots a_k U_k$ appartienne à $\mathcal{B}_n$ dès que $(U_o , U_1 , \dots U_k)$ appartient à $\mathcal{B}_n^{k+1}$?

Troisième question -

On considère $\mathcal{B}_3$ et les six matrices de substitutions (chaque ligne et chaque colonne contient un élément égal à 1 et deux éléments égaux à 0) ayant 3 lignes et 3 colonnes. On indexe ces six matrices, notées $K_o , K_1 , \dots K_5$, avec $I = K_o$ (matrice unité).

A chaque six-uplet $s = \{ a_o , a_1 , \dots a_4 , a_5 \}$ vérifiant la relation (1) trouvée dans la première question on associe la matrice S,

$$S = a_o K_o + a_1 K_1 + \dots + a_5 K_5 = f(s)$$

a) montrer que S décrit $\mathcal{B}_3$.

b) s étant supposé donné, déterminer l'ensemble des six-uplets (s') tels que $f(s) = f(s')$.

en déduire que, à tout élément de $\mathcal{B}_3$ correspond un six-uplet unique s tel que $U = f(s)$ et $a_o = 0$.

c) A l'aide du résultat b) déterminer l'ensemble des matrices d'ordre 3 telles que :

1°/- elles appartiennent à $\mathcal{B}_3$.

2°/- la somme des termes de la première diagonale soit 1 et la somme des termes de la deuxième diagonale soit 1.

./.

Quatrième question -

Déduire des résultats précédents toutes les matrices d'ordre 3 à éléments entiers et positifs tels que les 8 sommes que sont :

a) les 3 sommes des éléments d'une même ligne

b) les 3 sommes des éléments d'une même colonne

c) les 2 sommes des éléments d'une même diagonale,

soient toutes égales à 27. On entend par là qu'il faut donner le cardinal de l'ensemble de ces matrices ainsi que le moyen d'en expliciter une quelconque.

DEUXIEME PROBLEME -

L'espace réel usuel est rapporté à un repère orthonormé (O , x , y , z). Dans le plan z = o , (A) est une courbe donnée par son équation polaire $r = f(\theta)$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$, et où l'axe polaire est Ox , f étant de classe infinie.

On associe à la courbe (A) la surface (S) engendrée par la famille des droites, joignant P , sur (A) , de coordonnées polaires (θ , $f(\theta)$) et Q , sur Oz , de cote $f(\theta)$.

1°/- Déterminer une représentation paramétrique de la surface (S). Il sera commode de représenter un point M de la droite (P , Q) par un système de coordonnées cylindriques (ρ , θ , z).

2°/- Déterminer par son équation polaire dans le plan z = h , la section (A_h) de (S) par le plan z = h. Comparer les sous-normales polaires(*) à (A) et (A_h) en deux points de même angle polaire θ. En déduire une construction de la tangente en M (θ) à (A_h) connaissant la tangente en P(θ) à (A).

3°/- Déterminer les courbes (Γ) de la surface (S) normales en chacun de leur point à la droite (P,Q) passant par ce point.

./.

(*) *Sous-normale polaire en M à une courbe : $\overrightarrow{ON}$, où N est le point d'intersection de la normale en M à la courbe et de l'axe d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$ si $r = f(\theta)$ est l'équation polaire de la courbe.*

4°/- Lorsque (A) est le cercle d'équation $r = a \cos\theta$, $z = 0$, une des courbes (Γ) est la courbe :

$$(\Gamma_o) \begin{cases} \rho = \frac{a}{2} (\cos\theta + 1) \\ z = \frac{a}{2} (\cos\theta - 1) \end{cases}$$

Construire alors les projections de (Γ_o) sur chacun des trois plans de coordonnés et calculer la longueur de (Γ_o).

5°/- On revient au cas général où (A) n'est pas précisée.

Déterminer le vecteur $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$ en fonction de f et de la fonction λ de classe infinie, tel que :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \overrightarrow{OQ}(\theta) + \lambda(\theta)\ \overrightarrow{QP}(\theta)$$

Peut-on choisir (A) telle qu'il existe sur (S) des courbes telles qu'en tout point $M(\theta)$, $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$ soit parallèle à $\overrightarrow{PQ}$?

En particulier, déterminer (A) pour qu'il en soit ainsi avec $f(0) = f'(0) = 0$. Etudier les mouvements des projections M_1 et m de $M(\theta)$ sur Oz et sur xOy, en prenant θ comme paramètre temps. L'un des résultats n'était-il pas prévisible ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail